

Θέματα και Λύσεις

ΘΕΜΑ 1. Υλικό σημείο κινείται στον άξονα $x'Ox$ υπό την επίδραση του δυναμικού

$$V(x) = 2a^2x - \frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{3}, \quad a > 0.$$

- α) Βρείτε τα σημεία ισορροπίας και την ευστάθειά τους.
 β) Για ποιο διάστημα των τιμών της ενέργειας και της θέσης έχουμε περατωμένη κίνηση;
 γ) Σχεδιάστε το φασικό διάγραμμα και σημειώστε τις περιοχές που περιγράφουν διαφορετικές κινήσεις ποιοτικά.

Λύση

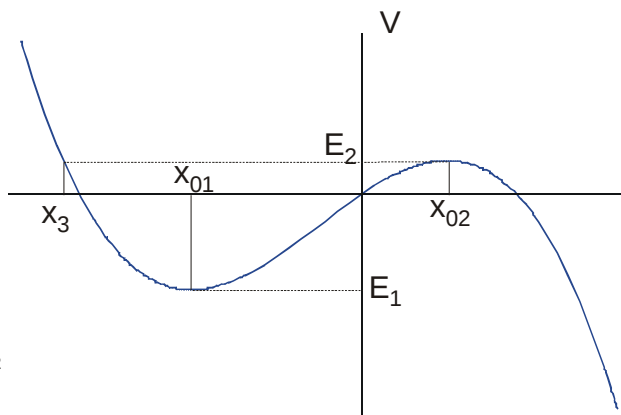
α) Τα σημεία ισορροπίας αντιστοιχούν στα ακρότατα του δυναμικού, δηλαδή

$$\frac{dV}{dx} = 2a^2 - ax - x^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_{01} = -2a \\ x_{02} = a \end{cases}$$

Είναι

$$\frac{d^2V}{dx^2} = -a - 2x = \begin{cases} a > 0 & \text{για } x = x_{01} \\ -3a < 0 & \text{για } x = x_{02} \end{cases}$$

Άρα το x_{01} είναι ευσταθές και το x_{02} ασταθές.



β) Περατωμένες τροχιές έχουμε για ενέργειες στο διάστημα $E_1 < E < E_2$, όπου E_i οι τιμές του δυναμικού στα ακρότατα δηλαδή

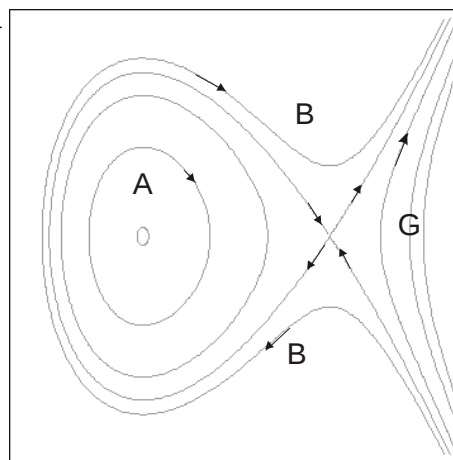
$$E_1 = V(x_{01}) = -\frac{10a^3}{3}, \quad E_2 = V(x_{02}) = \frac{7a^3}{6}$$

Οι περατωμένες τροχιές εκτείνονται στο διάστημα $x_3 < x < x_{02}$, όπου τα x_3 και x_{02} βρίσκονται ως ρίζες της εξίσωσης

$$V(x) = E_2 \Rightarrow 2a^2x - \frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{3} = \frac{7a^3}{6} \Rightarrow \begin{cases} x_{02} = a \\ x_3 = -\frac{7a}{2} \end{cases}$$

(σημείωση: γνωρίζουμε εκ των προτέρων ότι η παραπάνω εξίσωση έχει μια διπλή ρίζα την $x_{02}=a$)

γ) Γύρω από το ευσταθές σημείο ισορροπίας το διάγραμμα μοιάζει με αυτό του αρμονικού ταλαντωτή (περιοχή Α), ενώ γύρω από το ασταθές σημείο (όπου $E=E_2$) έχουμε υπερβολές (απωστικές δυνάμεις). Για $E > E_2$ έχουμε τις ανοιχτές φασικές καμπύλες της περιοχής Β και για $E < E_1$ έχουμε τις ανοιχτές φασικές καμπύλες της περιοχής Γ.



ΘΕΜΑ 2. Υλικό σημείο μάζας $m=1$ εκτελεί ταλαντώσεις που περιγράφονται από την διαφορική εξίσωση

$$\ddot{x} + \dot{x} + x = F_0 \cos(\omega t)$$

α) Έστω $F_0 = 0$. Προσδιορίστε την περίοδο της ταλάντωσης, δώστε την σχέση $x = x(t)$ που την περιγράφει (θεωρώντας αρχικό πλάτος D και αρχική φάση θ_0) και σχεδιάστε την πρόχειρα.

β) Για $F_0 \neq 0$. Βρείτε τη συχνότητα και το πλάτος συντονισμού. Σχεδιάστε την ταλάντωση κατά τον συντονισμό και αφού έχει περάσει αρκετός χρόνος ($t \gg 1$).

Λύση.

Η λύση της ΔΕ είναι η (δες τυπολόγιο)

$$x(t) = De^{-\gamma t} \cos(\omega_1 t - \theta_0) + A \cos(\omega t - \delta), \quad (1)$$

όπου D, θ_0 σταθερές που εξαρτώνται από τις αρχικές συνθήκες και A, δ σταθερές που εξαρτώνται από τις παραμέτρους του ταλαντωτή (δες τυπολόγιο)

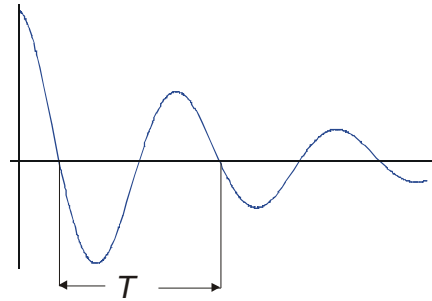
$$m=1, \quad b=1, \quad \gamma = \frac{b}{2m} = \frac{1}{2}, \quad F_0, \quad \omega$$

α) Για $F_0 = 0$ θα έχουμε $A=0$ και $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m} - \gamma^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$\text{Άρα } x(t) = De^{-t/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t - \theta_0\right)$$

Έχουμε δηλαδή φθίνουσες ταλαντώσεις με περίοδο

$$T = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{4\pi}{\sqrt{3}}$$



β) Για $F_0 \neq 0$ έχουμε εξαναγκασμένες ταλαντώσεις με πλάτος (δες τυπολόγιο)

$$A = \frac{F_0}{\sqrt{\omega^2 + (1 - \omega^2)^2}}, \quad (2)$$

Συχνότητα συντονισμού έχουμε για την τιμή $\omega = \omega_R$ όπου το A γίνεται μέγιστο, δηλαδή το $q = \omega^2 + (1 - \omega^2)^2$ γίνεται ελάχιστο ή

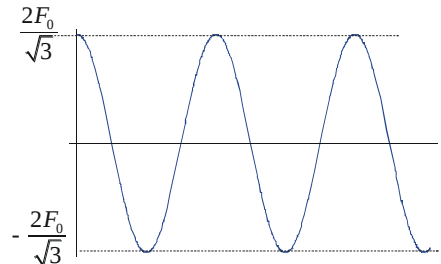
$$\left. \frac{dq}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_R} = 0 \Rightarrow -2 + 4\omega_R^2 = 0 \Rightarrow \omega_R = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Για $\omega = \omega_R$ η (2) μας δίνει το πλάτος του συντονισμού $A = \frac{2F_0}{\sqrt{3}}$

Για $t \gg 1$ ο πρώτος όρος της (1) γίνεται πολύ μικρός (τον θεωρούμε μηδέν) και για τον συντονισμό παίρνει τη μορφή

$$x(t) = \frac{2F_0}{\sqrt{3}} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}t - \delta\right), \text{ δηλαδή έχουμε αρμονική}$$

ταλάντωση πλάτους A και περιόδου $T = 2\sqrt{2}\pi$.



ΘΕΜΑ3.

α) Να δείξετε ότι η διαφορική εξίσωση της κίνησης σε πεδίο κεντρικών δυνάμεων $F(r)$

$$\frac{d^2}{d\vartheta^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} = -\frac{mr^2}{L^2} F(r)$$

μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$\frac{d^2 r}{d\vartheta^2} - \frac{2}{r} \left(\frac{dr}{d\vartheta} \right)^2 - r = \frac{mr^4}{L^2} F(r).$$

β) Να βρεθεί το πεδίο κεντρικών δυνάμεων $F(r)$ στο οποίο είναι δυνατή η ύπαρξη τροχιών της μορφής $r = a \sin(b\vartheta)$, με $a, b > 0$. Ποία συνθήκη πρέπει να ικανοποιούν τα

a, b , ώστε η δύναμη να είναι της μορφής $F(r) = \frac{C}{r^n}$, όπου C σταθερά διάφορη του μηδενός και $n \geq 1$ φυσικός;

Λύση

α) Έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\vartheta} \left(\frac{1}{r} \right) &= \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \right) \cdot \frac{dr}{d\vartheta} = -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\vartheta}, \\ \frac{d^2}{d\vartheta^2} \left(\frac{1}{r} \right) &= \frac{d}{d\vartheta} \left(-\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\vartheta} \right) = \frac{d}{d\vartheta} \left(-\frac{1}{r^2} \right) \cdot \frac{dr}{d\vartheta} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 r}{d\vartheta^2} = \\ &= \frac{d}{dr} \left(-\frac{1}{r^2} \right) \cdot \frac{dr}{d\vartheta} \cdot \frac{dr}{d\vartheta} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 r}{d\vartheta^2} = \frac{2}{r^3} \left(\frac{dr}{d\vartheta} \right)^2 - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 r}{d\vartheta^2}. \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας την παραπάνω σχέση στην εξίσωση $\frac{d^2}{d\vartheta^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} = -\frac{mr^2}{L^2} F(r)$,

παίρνουμε

$$\frac{2}{r^3} \left(\frac{dr}{d\vartheta} \right)^2 - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 r}{d\vartheta^2} + \frac{1}{r} = -\frac{mr^2}{L^2} F(r).$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της εξίσωσης με $-r^2$, καταλήγουμε τελικά στη ζητούμενη σχέση

$$\frac{d^2 r}{d\vartheta^2} - \frac{2}{r} \left(\frac{dr}{d\vartheta} \right)^2 - r = \frac{mr^4}{L^2} F(r).$$

β) Παραγωγίζοντας την εξίσωση της τροχιάς δυο φορές παίρνουμε

$$\frac{dr}{d\vartheta} = ab \cos(b\vartheta) \Rightarrow \left(\frac{dr}{d\vartheta} \right)^2 = a^2 b^2 \cos^2(b\vartheta) = a^2 b^2 [1 - \sin^2(b\vartheta)] = b^2 (a^2 - r^2),$$

$$\frac{d^2 r}{d\vartheta^2} = -ab^2 \sin(b\vartheta) = -b^2 r.$$

Αντικαθιστώντας τις δυο παραπάνω σχέσεις στην διαφορική εξίσωση που δείξαμε στο ερώτημα α) έχουμε

$$-b^2 r - \frac{2}{r} b^2 (a^2 - r^2) - r = \frac{mr^4}{L^2} F(r) \Rightarrow -b^2 r - \frac{2a^2 b^2}{r} + 2b^2 r - r = \frac{mr^4}{L^2} F(r) \Rightarrow$$

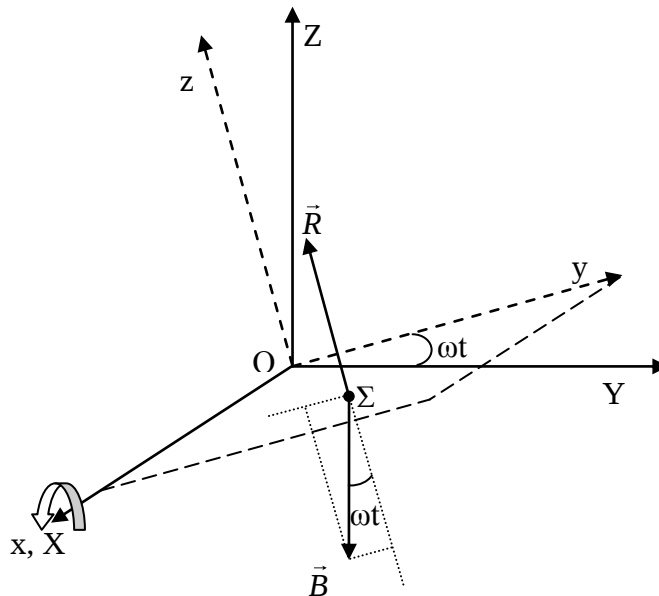
$$F(r) = \frac{L^2}{m} \left[\frac{(b^2 - 1)}{r^3} - \frac{2a^2 b^2}{r^5} \right]$$

Από την έκφραση της δύναμης βλέπουμε ότι για $b=1$ και $a > 0$ η δύναμη είναι της μορφής $F(r) = \frac{C}{r^n}$ με $C = -\frac{2a^2 L^2}{m}$ και $n=5$.

ΘΕΜΑ 4. Υλικό σημείο Σ είναι υποχρεωμένο να κινείται υπό την επίδραση του βάρους του πάνω σε λείο επίπεδο Π που περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$ γύρω από τον οριζόντιο άξονα Ox . Ορίστε κατάλληλο σχετικό σύστημα ως προς το επίπεδο (να γίνει το σχήμα) και βρείτε τις διαφορικές εξισώσεις της κίνησης και την αντίδραση R του επιπέδου.

Λύση

Έστω $OXYZ$ αδρανειακό σύστημα αξόνων, και $Oxyz$ περιστρεφόμενο (μη αδρανειακό) σύστημα με μοναδιαία διανύσματα $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ όπως φαίνονται στο σχήμα. Τα δύο συστήματα συντεταγμένων ταυτίζονται για $t = 0$.



Η διαφορική εξίσωση της κίνησης του Σ είναι:

$$m\vec{\gamma}_\sigma = \vec{F} - m\vec{\gamma}_0 - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) - m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} - 2m\vec{\omega} \times \vec{u}_\sigma$$

όπου $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$, $\vec{u}_\sigma = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j}$, $\vec{\gamma}_\sigma = \ddot{x}\hat{i} + \ddot{y}\hat{j}$, $\vec{\omega} = \omega\hat{i}$.

Υπολογίζουμε τους όρους που εμφανίζονται στην παραπάνω εξίσωση.

Επειδή οι αρχές των δύο συστημάτων συντεταγμένων ταυτίζονται έχουμε $\vec{\gamma}_0 = \vec{0}$.

Επειδή η γωνιακή ταχύτητα είναι σταθερή έχουμε $\dot{\vec{\omega}} = 0 \Rightarrow m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} = 0$.

Η δύναμη $\vec{F}$ είναι το άθροισμα του βάρους $\vec{B} = -mg[\cos(\omega t)\hat{k} + \sin(\omega t)\hat{j}]$ και της αντίδρασης $\vec{R} = R\hat{k}$.

$$\text{Έχουμε } \vec{\omega} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \omega & 0 & 0 \\ x & y & 0 \end{vmatrix} = \omega y \hat{k} \text{ οπότε } \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega y \end{vmatrix} = -\omega^2 y \hat{j}.$$

$$\text{Επίσης } \vec{\omega} \times \vec{u}_\sigma = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \omega & 0 & 0 \\ \dot{x} & \dot{y} & 0 \end{vmatrix} = \omega \dot{y} \hat{k}.$$

Αντικαθιστώντας όλες αυτές τις σχέσεις στην αρχική διαφορική εξίσωση και παίρνοντας τις συνιστώσες των διανυσμάτων στους άξονες x, y, z, καταλήγουμε στις ακόλουθες 3 εξισώσεις

$$m\ddot{x} = 0,$$

$$m\ddot{y} = -mg \sin(\omega t) + m\omega^2 y,$$

$$m\ddot{z} = 0 = -mg \cos(\omega t) - 2m\omega \dot{y} + R.$$

Οι δύο πρώτες διαφορικές εξισώσεις περιγράφουν την κίνηση στο επίπεδο.

Η τρίτη εξίσωση μας δίνει την αντίδραση του επιπέδου $R = mg \cos(\omega t) + 2m\omega \dot{y}$

ΘΕΜΑΤΑ Β

ΘΕΜΑ 1Β. Υλικό σημείο κινείται στον άξονα $x'Ox$ υπό την επίδραση του δυναμικού

$$V(x) = 2a^2x + \frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{3}, \quad a > 0.$$

- α) Βρείτε τα σημεία ισορροπίας και την ευστάθειά τους.
 β) Για ποιο διάστημα των τιμών της ενέργειας και της θέσης έχουμε περατωμένη κίνηση;
 γ) Σχεδιάστε το φασικό διάγραμμα και σημειώστε τις περιοχές που περιγράφουν διαφορετικές κινήσεις ποιοτικά.

Λύση

Παρόμοια με τα θέματα Α. Βρίσκουμε

$$x_{01} = -a, \quad x_{02} = 2a, \quad E_1 = -\frac{7a^3}{6}, \quad E_2 = \frac{10a^3}{3}, \quad x_3 = -\frac{5a}{2}$$

ΘΕΜΑ 2Β. Υλικό σημείο μάζας $m=1$ εκτελεί ταλαντώσεις που περιγράφονται από την διαφορική εξίσωση

$$\ddot{x} + \frac{1}{2}\dot{x} + \frac{1}{2}x = F_0 \cos(\omega t)$$

- α) Έστω $F_0 = 0$. Προσδιορίστε την περίοδο της ταλάντωσης, δώστε την σχέση $x = x(t)$ που την περιγράφει (θεωρώντας αρχικό πλάτος D και αρχική φάση θ_0) και σχεδιάστε την πρόχειρα.
 β) Για $F_0 \neq 0$. Βρείτε τη συχνότητα και το πλάτος συντονισμού. Σχεδιάστε την ταλάντωση κατά τον συντονισμό και αφού έχει περάσει αρκετός χρόνος ($t \gg 1$).

Λύση

Παρόμοια με τα θέματα Α. Βρίσκουμε

$$\alpha) \gamma = \frac{1}{4}, \quad \omega_1 = \frac{\sqrt{7}}{4}, \quad T = \frac{8\pi}{\sqrt{7}}$$

$$\beta) \omega_R = \sqrt{\frac{3}{8}}, \quad A_R = \frac{8F_0}{\sqrt{7}}$$

ΘΕΜΑ 3Β.

- α) Να δείξετε ότι η διαφορική εξίσωση της κίνησης σε πεδίο κεντρικών δυνάμεων $F(r)$

$$\frac{d^2}{d\vartheta^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} = -\frac{mr^2}{L^2} F(r)$$

μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$\frac{d^2 r}{d\vartheta^2} - \frac{2}{r} \left(\frac{dr}{d\vartheta} \right)^2 - r = \frac{mr^4}{L^2} F(r).$$

β) Να βρεθεί το πεδίο κεντρικών δυνάμεων $F(r)$ στο οποίο είναι δυνατή η ύπαρξη τροχιών της μορφής $r = a \sin(b\theta)$, με $a, b > 0$. Ποία συνθήκη πρέπει να ικανοποιούν τα a, b , ώστε η δύναμη να είναι της μορφής $F(r) = \frac{C}{r^n}$, όπου C σταθερά διάφορη του μηδενός και $n \geq 1$ φυσικός;

Λύση. Όπως τα θέματα Α

ΘΕΜΑ 4Β. Υλικό σημείο Σ είναι υποχρεωμένο να κινείται υπό την επίδραση του βάρους του πάνω σε λείο επίπεδο Π που περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$ γύρω από τον οριζόντιο άξονα Oy . Ορίστε κατάλληλο σχετικό σύστημα ως προς το επίπεδο (να γίνει το σχήμα) και βρείτε τις διαφορικές εξισώσεις της κίνησης και την αντίδραση R του επιπέδου.

Λύση

Παρόμοια με τα θέματα Α. Βρίσκουμε

$$m\ddot{x} = mg \sin(\omega t) + m\omega^2 x,$$

$$m\ddot{y} = 0,$$

$$m\ddot{z} = 0 = -mg \cos(\omega t) + 2m\omega\dot{x} + R.$$

και

$$R = mg \cos(\omega t) - 2m\omega\dot{x}.$$